

پاسخنامه

آزمون ۳ علامه طباطبائی

دوازدهم ریاضی

۱۴۰۵/۰۷/۲۴



گردآورنده:

۳۵ سؤال

۲۵ سؤال

۲۰ سؤال

۱ ریاضیات

۲ فیزیک

۳ شیمی

۸۰ سؤال

۳ ابتدا با طرفین تساوی در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها،

معادله را حل می‌کنیم:

$$x + (x - a)(x - 4) = x^2 - 16$$

$$\Rightarrow x + x^2 - ax - 4x + 4a = x^2 - 16$$

$$\Rightarrow x = \frac{4a+16}{3+a}$$

برای این که معادله ریشه نداشته باشد، ریشه به‌دست آمده نباید

قابل قبول باشد یعنی:

حالت ۱:

$$a = -3 \Rightarrow x \text{ به دست نمی‌آید}$$

حالت ۲:

$$\begin{cases} x = 4 \Rightarrow 4 = \frac{4a+16}{3+a} \Rightarrow a \text{ به دست نمی‌آید} \\ x = -4 \Rightarrow -4 = \frac{4a+16}{3+a} \Rightarrow -12 - 4a = 4a + 16 \\ \Rightarrow a = -\frac{7}{2} \end{cases}$$

در حالت ۲، x به‌دست آمده باید ریشه‌های مخرج باشد تا قابل قبول نشود.

$$a \text{ مجموع مقادیر به دست آمده برای } a = -3 - \frac{7}{2} = -\frac{13}{2}$$



۱ دامنه اولیه معادله $\{-6\} - (-\infty, 3)$ است و با مخرج

مشترک گرفتن، داریم:

$$\frac{-2\sqrt{3-x}}{9-3+x} = \frac{6-2x}{-9\sqrt{3-x}} \Rightarrow 18(3-x) = (6+x) \times 2(3-x)$$

با توجه به دامنه و حذف $3-x$ از طرفین تساوی، داریم:

$$9 = 6 + x \Rightarrow x = 3$$

$x = 3$ نیز در دامنه معادله قرار ندارد، پس معادله ریشه ندارد.



۲. ۷

$$|x + 40| < x |2x + 3| \Rightarrow x > 0$$

$$\Rightarrow x + 40 > 0, \quad 2x + 3 > 0$$

$$\Rightarrow x + 40 < x(2x + 3) \Rightarrow 2x^2 + 2x - 40 > 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 20 > 0 \Rightarrow (x < -5) \cup (x > 4)$$

$$\xrightarrow{x > 0} x > 4$$

جواب نامعادله شامل اعداد صحیح $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ نمی‌شود.



ریاضیات

۱. ابتدا ضابطه تابع موردنظر را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$y = (2x - 1)^2 - 2 \xrightarrow{\text{بالا واحد 2}} (2x - 1)^2$$

$$\xrightarrow{\text{طول نقاط 2 برابر}} (x - 1)^2 \xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}} x^2$$



۲. چند جمله‌ای $p(x)$ به صورت $p(x) = kx(x^2 - 4) + 6$

می‌باشد.

$$p(-1) = 0 \Rightarrow -k(-3) + 6 = 0 \Rightarrow k = -2$$

$$p(x) = -2x(x^2 - 4) + 6$$

$$\Rightarrow p(1) = -2(-3) + 6 = 12$$



۳. ۲

$$2x^3 + 3x^2 + ax + b = (x - 1)Q(x) - 1$$

$$\xrightarrow{x=1} 5 + a + b = -1$$

$$\Rightarrow b = -a - 6$$

$$\Rightarrow 2x^3 + 3x^2 + ax - a - 5 = (x - 1)Q(x)$$

$$\Rightarrow 2(x^3 - 1) + 3(x^2 - 1) + a(x - 1) = (x - 1)Q(x)$$

$$\Rightarrow Q(x) = 2(x^2 + x + 1) + 3(x + 1) + a$$

$$\Rightarrow Q(1) = 6 + 6 + a = 10 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow b = -4$$

$$\Rightarrow a - b = 2$$



۴. ۲

$$\frac{2x+8}{x+1} \times \frac{3x+3}{x+4} = x^2 + 5$$

$$\xrightarrow{x \neq -1} \frac{2(x+4)}{x+4} \times \frac{3(x+1)}{x+4} = x^2 + 5 \Rightarrow 6 = x^2 + 5$$

$$\Rightarrow x = 1, x = -1$$

که $x = -1$ در دامنه قرار ندارد، پس معادله یک جواب دارد.





۱۱. ۳

$$ay - 3x + 6 = 0 \xrightarrow[\text{موازی بودن}]{\text{شرط}} a = \frac{3}{a} \neq 2\sqrt{3} \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}$$

با فرض: $a = \sqrt{3}$

$$\begin{cases} \sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \\ y - \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \\ \sqrt{3}y - 3x + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{3}{\sqrt{3}+9} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S = \frac{3\pi}{16}$$

با فرض: $a = -\sqrt{3}$

$$\begin{cases} -\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \\ y + \sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0 \\ -\sqrt{3}y - 3x - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2R = \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow S = \frac{27}{16}\pi$$



۱۲. ۲ با توجه به مختصات مرکز دایره و نمودار، شعاع برابر ۱ است.
فرض می‌کنیم شیب خط d برابر m ($m < 0$) باشد.

$$y = mx \Rightarrow y - mx = 0$$

$$A(3, -1)$$

$$1 = \frac{|-1-3m|}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$\Rightarrow 1 + m^2 = 9m^2 + 6m + 1 \Rightarrow m = -\frac{3}{4}$$



۱۳. ۳

$$y(0) = 0 \Rightarrow b^2 + 8 = 0 \Rightarrow b = -2$$

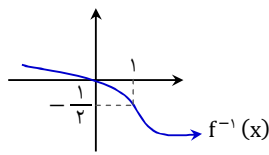
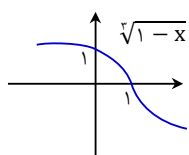
با توجه به نمودار و انتقال آن داریم:

$$a(-2) - 2 = 0 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = (-2x - 1)^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = \sqrt{1 - y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{\sqrt{1-x}-1}{2}$$



۱. ۱

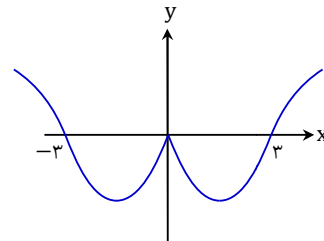
$$x^2 - 3|x| = 1 - m$$

$$y = x^2 - 3|x|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \Rightarrow y = x^2 - 3x \\ x < 0 \Rightarrow y = x^2 + 3x \end{cases}$$

با توجه به نمودار y برای آن که معادله ۳ جواب داشته باشد باید

$$m = 1 \text{ و } 1 - m = 0$$



۲. ۳

$$|2x - 1| + |x + 4| = |3x + 3|$$

$$|a| + |b| = |a + b| \Rightarrow ab \geq 0$$

$$(2x - 1)(x + 4) \geq 0 \Rightarrow (x \leq -4) \cup (x \geq \frac{1}{2})$$

جواب معادله اعداد صحیح $-3, -2, -1, 0$ را شامل نمی‌شود.

۱۰. ۱

$$m_{AB} = \frac{3+1}{-2-1} = \frac{-4}{3}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{4} \text{ شیب عمود منصف}$$

$$AB \text{ وسط پاره خط } M(-\frac{1}{2}, 1)$$

$$\text{معادله عمود منصف: } y - 1 = \frac{3}{4}(x + \frac{1}{2})$$

$$4y - 3x - \frac{11}{2} = 0$$

$$CH = \frac{|8 + \frac{3}{2} - \frac{11}{2}|}{\sqrt{16+9}} = \frac{4}{5}$$

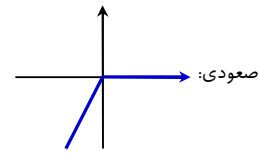


۱۴. ۴

اکیداً صعودی: $y = |x| + \sqrt{x} \xrightarrow{x \geq 0} y = x + \sqrt{x}$

$$y = x - |x|$$

$$\Rightarrow y = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$



$\sqrt{x}$ اکیداً صعودی، پس $\frac{1}{\sqrt{x}}$ اکیداً نزولی و $-\frac{1}{\sqrt{x}}$ اکیداً صعودی می‌شود، بنابراین هر ۳ تابع صعودی هستند.



۱۵. ۴

$$x \geq -1$$

$$\Rightarrow y = (a-3)x - 2a(x+1) - 1 = (-a-3)x - 2a - 1$$

$$x < -1$$

$$\Rightarrow y = (a-3)x + 2a(x+1) - 1 = (3a-3)x + 2a - 1$$

با توجه به اینکه هر دو ضابطه به ازای $x = -1$ برابرند، زمانی تابع یکنواست که حاصل ضرب شیب‌ها منفی نباشد.

$$(-a-3)(3a-3) \geq 0 \Rightarrow -3 \leq a \leq 1$$

اعداد صحیح a عبارتند از:

$$a = -3, -2, -1, 0, 1$$

که مجموع آن‌ها -5 است.



۱۶. ۳

۱۷. ۴

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{دترمینان}} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7$$

۱۸. ۲ با توجه به اینکه $|A| = -6$ ، پس A وارون پذیر است، بنابراین:

$$2A^{-1} \times \frac{1}{3}A^T = \frac{2}{3}(A^{-1} \times A^T) = \frac{2}{3}A^T$$

$$= \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ جمع درایه‌ها 12

۱۹. ۳

$$\begin{cases} A(A^T - 3I) = I \\ (A^T - 3I)A = I \end{cases} \Rightarrow A^{-1} = A^T - 3I$$

۲۰. ۳

$|A| = 4$ ، پس A وارون پذیر است:

$$(ABA^{-1})^T = ABA^{-1} \times ABA^{-1} \times ABA^{-1} = AB^T A^{-1}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

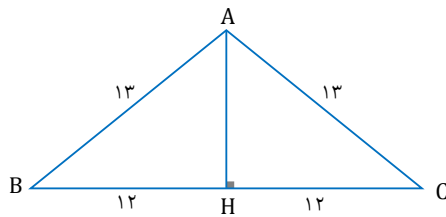
$$B^T = B^T \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$AB^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 24 & -8 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 108 & -32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 27 & -8 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه‌های ستون دوم} = -8$$

۲۱. ۳



طبق قضیه فیثاغورس در مثلث AHC داریم:

$$AH^2 + HC^2 = AC^2 \Rightarrow AH = 5$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 5 \times 24 = 60$$

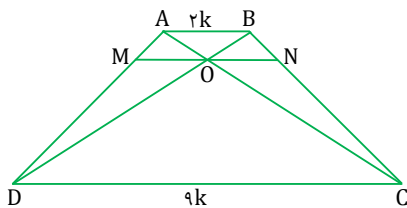
اگر نسبت تشابه دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را k فرض کنیم، آنگاه:

$$\frac{S_{\triangle A'B'C'}}{S_{\triangle ABC}} = (k)^2 \Rightarrow \frac{2/4}{60} = k^2 \Rightarrow k = \frac{1}{5}$$

پس محیط مثلث $A'B'C'$ $\frac{1}{5}$ محیط مثلث ABC است:

$$A'B'C' \text{ محیط} = \frac{1}{5}(13 + 13 + 24) = 10$$

۲۲. ۳



$$\frac{AB}{CD} = \frac{2}{9} \Rightarrow \begin{cases} AB = 2k \\ CD = 9k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{ON}{AB} = \frac{CN}{CB} \\ \frac{ON}{CD} = \frac{BN}{CB} \end{cases} \xrightarrow{(+)} \frac{ON}{AB} + \frac{ON}{CD} = \frac{CN+BN}{CB}$$

$$\Rightarrow \frac{ON}{2k} + \frac{ON}{9k} = 1 \Rightarrow ON = \frac{18}{11}k$$

$$\xrightarrow{\text{به همین ترتیب}} OH = \frac{18}{11}k \Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{\frac{18}{11}k + \frac{18}{11}k}{9k}$$

$$\Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{4}{11}$$



۳.۳

۲۷. روش اول: فرض $۸|۳k+۲$ که در آن $(k \in \mathbb{Z})$. به‌ازای $k=۲$ درست است، پس:

$$۶۴|۳۳(۲)^۲ + m(۲) + ۴ \Rightarrow ۶۴|۱۳۶ + ۲m$$

که به‌ازای $m=۲۸$ ، $m=۲۸$ ، $۱۳۶+۲(۲۸)=۱۹۲$ مضرب ۶۴ است.

روش دوم:

$$۸|۳k+۲ \xrightarrow{\text{توان } ۲} ۶۴|۹k^۲+۱۲k+۴ \quad (**)$$

$$۸|۳k+۲ \xrightarrow{\times ۸} ۶۴|۲۴k+۱۶ \Rightarrow ۶۴|(۲۴k+۱۶)k$$

$$\Rightarrow ۶۴|۲۴k^۲+۱۶k \quad (***)$$

از $(**)$ و $(***)$ داریم:

$$۶۴ \text{ مجموع را می‌شمارد} \rightarrow ۶۴|۳۳k^۲+۲۸k+۴ \Rightarrow m=۲۸$$

۳.۳ چون ۲۰۲۷ فرد است، پس:

$$\underbrace{۴۵+۲۵}_{۷۰} | ۴۵^{۲۰۲۷} + ۲۵^{۲۰۲۷} \Rightarrow ۲ \times ۵ \times ۷ | ۴۵^{۲۰۲۷} + ۲۵^{۲۰۲۷}$$

پس عدد $۴۵^{۲۰۲۷} + ۲۵^{۲۰۲۷}$ بر ۱، ۲، ۵، ۷، ۱۰، ۱۴، ۳۵ و ۷۰ بخش‌پذیر است.

۲۹. ۲

۲۵ = ۳۲، ۳۳ و ۲۷ = ۳ × ۱۱ و ۲۲ است. پس عددی که نسبت به هر سه عدد مذکور، اول باشد، عامل ۲، ۳ و ۱۱ ندارد. بنابراین عدد مرکب موردنظر به صورت $۵^\alpha \times ۷^\beta \times ۱۳^\gamma \times \dots$ است.

واضح است که کوچک‌ترین مقدار دورقمی این عدد مرکب $۲۵ = ۵^۲$ و بزرگ‌ترین مقدار دورقمی آن، $۹۵ = ۵ \times ۱۹$ است، که تفاضل این دو عدد برابر با ۷۰ می‌باشد.

۳۰. ۱

واضح است که $a|۲۴$. از طرفی می‌دانیم $۲۴ = ۳^۱ \times ۲^۳$ و $۱۴۴۰ = ۲^۵ \times ۳^۲ \times ۵^۱$ ، بنابراین درمی‌یابیم که $k \times ۳^۱ \times ۲^۳ = a$ ، بنابراین ۲، ۳، ۵ و $k \neq ۲, ۳, ۵$ و همچنین مضارب از آن‌ها نمی‌تواند باشد. (چرا؟). بنابراین کوچک‌ترین مقدار طبیعی k برای سه‌رقمی شدن a ، برابر با ۷ است و در نتیجه کوچک‌ترین مقدار طبیعی سه‌رقمی a برابر $۱۶۸ = ۲^۳ \times ۳ \times ۷$ می‌باشد که مجموع رقم‌های آن ۱۵ است.

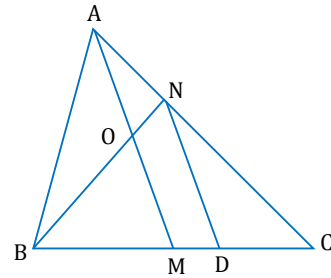
۳۱. ۳

میدانید

اگر یک عدد صحیح، بر دو عدد صحیح غیرصفر بخش‌پذیر باشد، بر ک.م.م آن‌ها نیز بخش‌پذیر است. بنابراین:

$$\begin{aligned} \{۱۵۶|a\} &\Rightarrow [۱۵۶, ۶۶]|a \Rightarrow [۲^۲ \times ۳ \times ۱۳, ۲ \times ۳ \times ۱۱]|a \\ &\Rightarrow ۲^۲ \times ۳ \times ۱۱ \times ۱۳|a \xrightarrow{q \in \mathbb{Z}} a = ۱۷۱۶q \end{aligned}$$

به‌ازای $۲ = q$ ، دومین عضو طبیعی مجموعه $a = ۳۴۳۲$ به‌دست می‌آید که رقم صدگان آن ۴ است.



از N خطی موازی AM رسم می‌کنیم تا BC را در D قطع کند. در این صورت داریم:

$$\triangle AMC: ND \parallel AM \Rightarrow \frac{CM}{DM} = \frac{CA}{NA} \xrightarrow{\frac{CA}{NA} = \frac{3}{2}} CM = 3DM \quad (۱)$$

$$\triangle BND: OM \parallel ND \Rightarrow \frac{BM}{MD} = \frac{BO}{ON} \xrightarrow{\frac{BO}{ON} = \frac{2}{3}} BM = 3DM \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱), (۲)} BM = CM \Rightarrow \frac{BM}{BC} = \frac{1}{2}$$

۲۴. ۱

$$\triangle DAC: S_{\triangle DAC} = \frac{1}{2} DA \times DC = \frac{1}{2} DH \times AC \Rightarrow DH = \frac{12}{5}$$

$$\triangle DAH: AH^۲ = AD^۲ - DH^۲ \Rightarrow AH = \frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow OH = OA - AH = \frac{Y}{10}$$

$$\begin{cases} \frac{S_{\triangle OHH'}}{S_{\triangle OAB}} = \left(\frac{OH}{OA}\right)^۲ = \left(\frac{\frac{Y}{10}}{\frac{Y}{25}}\right)^۲ = \left(\frac{Y}{25}\right)^۲ \\ \frac{S_{\triangle OAB}}{S_{ABCD}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{\triangle OAB} = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow S_{\triangle OHH'} = \frac{49}{625} S_{\triangle OAB} = \frac{147}{625}$$

۲۵. ۳ در هر n ضلعی $n-۳$ قطر از رأس A می‌گذرند و تعداد قطرها $\frac{n(n-۳)}{۲}$ است.

$$n-۳ = \frac{1}{5} \left(\frac{n(n-۳)}{۲} \right) \Rightarrow \begin{cases} n = ۳ \\ n = ۱۰ \end{cases}$$

$$\text{مجموع زوایای داخلی } n \text{ ضلعی محدب} = (n-۲) \times ۱۸۰^\circ$$

$$\text{مجموع زوایای خارجی } n \text{ ضلعی محدب} = ۳۶۰^\circ$$

$$\begin{cases} n = ۱۰ \Rightarrow \text{جواب} = \frac{(۱۰-۲) \times ۱۸۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = ۴ \\ n = ۳ \Rightarrow \text{جواب} = \frac{(۳-۲) \times ۱۸۰^\circ}{۳۶۰^\circ} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۲۶. ۳

$$۳x^۲ + y^۲ + ۲xy \geq ۴x - ۵$$

$$\Leftrightarrow ۳x^۲ + y^۲ + ۲xy - ۴x + ۵ \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x^۲ + y^۲ + ۲xy) + (x^۲ - ۴x + ۴) + (x^۲ + ۱) \geq ۰$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^۲ + (x-۲)^۲ + (x^۲ + ۱) \geq ۰$$

گزاره همیشه درست است.

پس $a = x + y$ ، $b = x - ۲$ (یا برعکس) و $c = x^۲ + ۱$ است.

فیزیک

۳۶. ۱ باتوجه به اینکه مقدار $1/15$ با ۳ اندازه‌گیری دیگر تفاوت زیادی دارد، آن را از میانگین حذف می‌کنیم و میانگین ۳ اندازه‌گیری دیگر را حساب می‌کنیم:

$$\Delta t = \frac{2/4 + 2/2 + 2/3}{3} = 2/3 \text{ s}$$

۳۷. ۳

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{\rho_B}{\rho_A} = \frac{m_B}{m_A} \times \frac{V_A}{V_B} = \frac{10 \times 4/6}{23} \times \frac{1}{2} = 1$$

۳۸. ۴



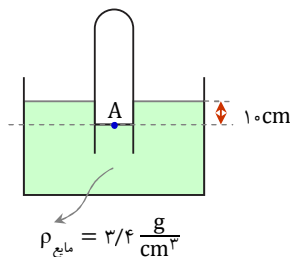
اگر سطح مقطع یک ظرف ثابت باشد، فشار وارد بر کف ظرف را می‌توان از روابط زیر محاسبه کرد: W وزن مایع، h ارتفاع مایع، A مساحت کف ظرف)

$$P = \rho gh = \frac{W}{A}$$

باتوجه به رابطه بیان شده داریم:

$$P = \frac{W}{A} \xrightarrow{\text{استوانه}} \frac{P_{\text{مکعب}}}{P_{\text{مکعب}}} = \frac{A_{\text{مکعب}}}{A_{\text{استوانه}}} = \frac{(0/5)^2}{0/25} = 1$$

۳۹. ۱



۱- باتوجه به خط فشار A داریم:

$$P_0 + P_{10\text{cm-مایع}} = P$$

$$\Rightarrow P - P_0 = P_{10\text{cm-مایع}}$$

۲- کافی است فشار ستونی از جیوه که با فشار 10cm از مایع درون ظرف برابر است را تعیین کنیم:

$$P_{10\text{cm-مایع}} = 3/4 \times g \times 10 = 13/6 \times g \times h_{\text{Hg}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{Hg}} = 2/5 \text{ cm}$$



۴۰. ۳ عبارت‌های الف، ب و پ درست و برگرفته از کتاب درسی می‌باشند، در مورد عبارت ت دقت کنید، با افزایش ارتفاع از سطح زمین، چگالی هوا کاهش یافته و فشار هم کاهش می‌یابد.

۳۲. ۲ فرض کنید $d = (a, b)$ ، بنا به فرآیند متباین‌سازی، عددی طبیعی a' و b' یافت می‌شوند به گونه‌ای که $(a', b') = 1$ و $a = a'.d$ و $b = b'.d$ ، بنابراین:

$$ab - 2(a, b) = 215 \Rightarrow (a'.d) \cdot (b'.d) - 2d = 215$$

$$\Rightarrow d \cdot (a'b'd - 2) = 215$$

$$\Rightarrow d \cdot (a'b'd - 2) = 5 \times 43$$

و در نتیجه:

$$\begin{cases} d = 5 \\ a'b'd - 2 = 43 \xrightarrow{d=5} a'.b' = 9 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(a', b')=1} (a' = 1, b' = 9) \text{ یا } (a' = 9, b' = 1)$$

$$\Rightarrow (a = 5, b = 45) \text{ یا } (a = 45, b = 5)$$

$$\Rightarrow a + b = 50$$

که مضرب ۲۵ است. توجه داشته باشید که حالت $d = 43$ و $a'b'd - 2 = 5$ غیرقابل قبول است.

۳۳. ۱ روش اول:

$$a = 19q + 5 \xrightarrow[\text{طبق فرض}]{\text{تعریف}} 7|19q + 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 7|3(19q + 5) \\ 7|56q \end{cases} \Rightarrow 7|q + 15$$

$$\xrightarrow[k \in \mathbb{Z}]{\text{تعریف}} q + 15 = 7k \Rightarrow q = 7k - 15$$

$$\Rightarrow a = 19(7k - 15) + 5 \Rightarrow a = 133k - 280$$

که به ازای $k = 3, 4, \dots, 9$ جواب‌های سه‌رقمی a به‌دست می‌آید و در نتیجه ۷ جواب سه‌رقمی برای عدد طبیعی a وجود دارد.

روش دوم:

$$a = 19q + 5$$

بنا به فرض داریم: $a = 19q + 5$ به‌ازای $q = 5$ اولین مقدار سه‌رقمی $a = 100$ به‌دست می‌آید که مضرب ۷ نیست، اما به‌ازای $q = 6$ مقدار $a = 119$ حاصل می‌شود که مضرب ۷ است و در نتیجه به‌ازای $q = 6, 13, 20, 27, 34, 41, 48$ جواب‌های سه‌رقمی مضرب ۷ برای a به‌دست می‌آید، بنابراین ۷ جواب دارد.

۳۴. ۲ مثال نقض برای حالت عکس گزینه‌های «۱» و «۳» عبارت

است از:

گزینه «۱»:

$$8 \times 6 \equiv 5 \times 6 \Rightarrow 8 \not\equiv 5$$

گزینه «۳»:

$$5^2 \equiv 6^2 \Rightarrow 5 \not\equiv 6$$

گزینه «۴»: خاصیت تعدی، لزوماً دوشرطی نیست.

۳۵. ۲

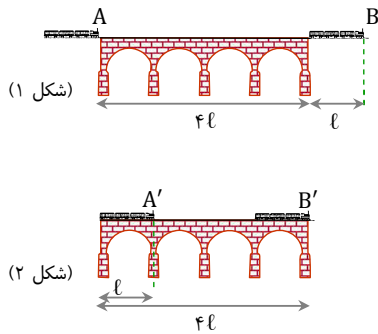
$3^{31} = 41(8) + 3$ پس $3^{31} \equiv 3 \pmod{41}$ ، بنابراین باقی‌مانده تقسیم 3^{29} بر ۴۱ را به‌دست می‌آوریم:

$$3^4 \equiv -1 \pmod{41} \Rightarrow (3^4)^7 \equiv (-1)^7 \pmod{41} \Rightarrow 3^{28} \times 3 \equiv (-1) \times 3 \pmod{41}$$

$$\Rightarrow 3^{29} \equiv -3 \equiv 38 \pmod{41}$$



۳ ۴۶



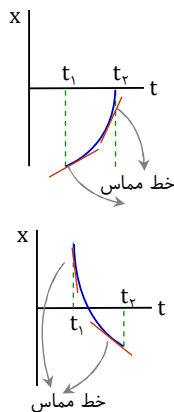
در شکل (۱) وضعیتی که قطار به صورت کامل از روی پل عبور می کند را نشان داده ایم. قطار باید از وضعیت A به وضعیت B برسد که مطابق شکل باید مسافتی برابر $(4l + l = 5l)$ را طی کند. در شکل (۲) مدت زمانی که قطار به صورت کامل روی پل است نمایش داده شده است که قطار باید مسافتی برابر $(4l - l = 3l)$ را طی کند.

باتوجه به ثابت بودن سرعت داریم:

$$\Delta t = \frac{1}{v} \xrightarrow{\text{ثابت } v} \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{l_1}{l_2} \Rightarrow \frac{90}{\Delta t_2} = \frac{5l}{3l} \Rightarrow \Delta t_2 = 54s$$



۴۷ ۴-۱ در نمودار مکان-زمان هر چه خط مماس بر منحنی به امتداد قائم نزدیک تر باشد تندتر و هر چه به امتداد افقی نزدیک تر تندتر می شود. بنابراین در نمودار گزینه «۱» تندتر افزایش یافته و در نمودار گزینه «۴» تندتر کاهش یافته است و گزینه «۴» صحیح است.



۲- در نمودار سرعت-زمان هرگاه منحنی به محور t نزدیک شود حرکت کندشونده و اگر از محور دور شود حرکت تندشونده خواهد بود. (هر دو نمودار گزینه «۲» و «۳» حرکت های تندشونده در نمودار سرعت-زمان هستند)

۴۱ ۴- برای این که جسمی در مایع غوطه ور شود، باید چگالی آن با چگالی مایع یکسان باشد:

$$\begin{aligned} (\rho_{\text{آب}} = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}) \\ \rho_{\text{قوطی}} = \rho_{\text{آب}} \Rightarrow \frac{m_{\text{بدنه}} + m_{\text{درپوش}}}{V_{\text{قوطی}}} = 1 \\ \Rightarrow 160 + m_{\text{درپوش}} = 200 \Rightarrow m_{\text{درپوش}} = 40g \end{aligned}$$



۴۲ ۳-۱ باتوجه به معادله پیوستگی داریم:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 \xrightarrow{A = \pi (\frac{d}{2})^2} \frac{v_1}{v_2} = (\frac{d_2}{d_1})^2 = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$$

۲- چون مایع تراکم ناپذیرتر است، آهنگ شارش آن در تمام نقاط مسیر یکسان است:

$$\frac{I_2}{I_1} = 1$$

۴۳ ۲-۱ سرعت لحظه ای شیب خط مماس بر منحنی مکان-زمان در یک لحظه معین است و تندتر اندازة این شیب است. باتوجه به خط مماس خواهیم داشت: (توجه کنید خط مماس صعودی است، پس سرعت لحظه ای مثبت بوده و تندتر هم در هر حال مثبت است).

$$S_{t=4} = \frac{6}{4-1} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۲- سرعت متوسط، شیب خط واصل دو نقطه در نمودار مکان-زمان است. بنابراین داریم:

$$v_{\text{av}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_4 - x_1}{4-1} = \frac{6-2}{3} = -\frac{4}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۴۴ ۱-۱ در نمودار مکان-زمان هر جا نمودار نزولی باشد، حرکت خلاف جهت محور است که بازه زمانی ۱۲ تا ۱۴ ثانیه این اتفاق افتاده است:

$$\Delta t = 14 - 12 = 2s$$

۲- توجه دارید که در بازه زمانی ۸ تا ۱۲ ثانیه و همچنین بازه زمانی ۱۴ تا ۱۸ ثانیه مورچه ساکن بوده و برای محاسبه مسافت داریم:

$$\begin{aligned} l &= \Delta x_{8-12} + |\Delta x_{12-14}| \\ &= (40 - 0) + |20 - 40| = 60 \text{ cm} \end{aligned}$$

۴۵ ۳-۱ حتماً توجه دارید جابه جایی متحرک خلاف جهت محور بوده و منفی است. باتوجه به اینکه در حرکت با سرعت ثابت مسافت برابر با اندازه جابه جایی است، داریم:

$$\begin{aligned} (|\Delta x| = l) \Rightarrow \Delta x = -18 \text{ m} \\ \Rightarrow v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-18}{5-2} = -6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{aligned}$$

۲- حالا مکان متحرک در لحظه $t = 0s$ یعنی مکان اولیه را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} \Delta x &= v \Delta t \Rightarrow x_2 - x_0 = -6 \times 2 \\ \Rightarrow x_0 &= 3 + 12 = 15 \text{ m} \end{aligned}$$

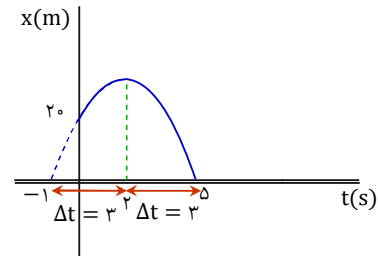
$$x = vt + x_0 = -6t + 15$$

۴۸ ■ ۲

میدانید

سهمی نسبت به راس خود متقارن است.

۱- باتوجه به تقارن سهمی نسبت به رأس خود، ریشه‌های سهمی داده شده را روی شکل نشان داده‌ایم: (ریشه $t_2 = 5S$ داده شده بود و ریشه $t_1 = -1S$ را باتوجه به تقارن ریشه‌ها نسبت به رأس سهمی یعنی $t = 2S$ به دست آورده‌ایم.)



۲- حالا معادله سهمی را تشکیل می‌دهیم:

$$x = k(t - t_1)(t - t_2) = k(t + 1)(t - 5)$$

$$x_0 = 20 \Rightarrow 20 = k(0 + 1)(0 - 5) \Rightarrow k = -4$$

$$x = -4(t + 1)(t - 5)$$

۳- فاصله جسم از مبدأ در لحظه تغییر جهت ($t = 2S$):

$$\begin{aligned} x_{2S} &= (-4) \times (2 + 1) \times (2 - 5) \\ &= (-4) \times 3 \times (-3) = 36m \end{aligned}$$



۴۹ ■ ۱ (روش اول)

میدانید

اگر در مدت t ثانیه در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی جسم Δx و سرعت نهایی آن v باشد، داریم:

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt$$

باتوجه به نکته بیان شده و انتخاب لحظه $t = 4S$ برای دو بازه نشان داده شده داریم: (در بازه ۳ تا ۴ ثانیه v_4 سرعت نهایی و در بازه ۴ تا ۶، v_6 سرعت اولیه محسوب می‌شود.)

$$\begin{cases} \Delta x_1 = 8 = -\frac{1}{2}a(4 - 3)^2 + v_4(4 - 3) \\ \Delta x_2 = 22 = -\frac{1}{2}a(6 - 4)^2 + v_6(6 - 4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8 = -\frac{1}{2}a + v_4 \\ 22 = 2a + 2v_6 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

(روش دوم)

میدانید

جابه‌جایی در ثانیه‌های متوالی در حرکت با شتاب ثابت از رابطه $\Delta x_{n+1} = \frac{1}{2}a(2t - 1) + v_0$ محاسبه می‌شود.

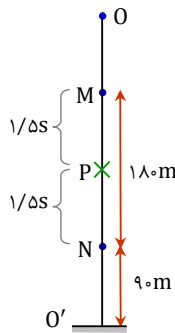
با توجه به نکته بیان شده در بازه ۳ تا ۴ ثانیه جابه‌جایی در ثانیه ۴م و در بازه ۴ تا ۶ مجموع جابه‌جایی در ثانیه ۵م و ۶م را داریم، بنابراین:

$$\Delta x = \frac{1}{2}a(2t - 1) + v_0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta x_4 = 3/2a + v_0 \\ \Delta x_5 = 4/2a + v_0 \\ \Delta x_6 = 5/2a + v_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3/2a + v_0 = 8 \\ 10/2a + 2v_0 = 22 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$



۱- ابتدا سرعت متوسط در بازه زمانی M تا N را تعیین می‌کنیم این سرعت با سرعت در نقطه P برابر است.



$$V_{av} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{1\lambda_0}{\tau} = \epsilon_0 \frac{m}{s} = v_P$$

۲- با معادله سرعت- زمان، سرعت در نقطه M را تعیین می‌کنیم:

$$v = gt \Rightarrow \Delta v = g\Delta t \Rightarrow v_P - v_M = 10 \times 1/5$$

$$\xrightarrow{v_p = c_0} V_M = r \Delta \frac{m}{s}$$

۳- فاصله OM را تعیین می کنیم:

$$v^r = rg\Delta y \Rightarrow OM = \frac{r\Delta^2}{r_0} = 1.1/2 \Delta m$$

۴- ارتفاع کل را تعیین می کنیم:

$$h_{\text{K}} = OM + MN + NO'$$

$$= 101/25 + 180 + 90 = 371/25 \text{ m}$$



۵۲ ۲ بررسی تمامی گزینه‌ها:

الف) اگر نیروی خالص وارد بر یک جسم ثابت باشد طبق قانون دوم نیوتون شتاب هم ثابت است. اما چنانچه این شتاب در راستای سرعت باشد حرکت بر خط مستقیم و چنانچه در راستای سرعت نباشد حرکت بر خط مستقیم نخواهد بود.

(شرط حرکت بر خط مستقیم آن است که یا شتاب نداشته باشیم یا شتاب در امتداد سرعت باشد). الف نادرست است.

ب) در لحظه تغییر جهت سرعت صفر می‌شود که دلیلی بر صفر شدن شتاب نیست و طبق قانون دوم نیوتون نیروی خالص هم الزاماً صفر نمی‌شود. ب نادرست است.

پ) اگر نیروی خالص متوازن باشد شتاب حرکت صفر خواهد بود
در این صورت یا جسم ساکن است و یا حرکت آن با سرعت ثابت
انجام می‌شود. چنین جسمی هیچ‌گاه تغییر جهت نمی‌دهد. عبارت پ
درست است.

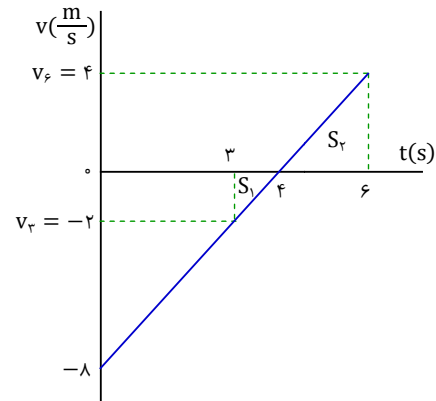
(ت) با کاهش نیروی خالص بزرگی شتاب کم می‌شود اما تا زمانی که شتاب در جهت سرعت باشد تندی افزایش می‌یابد بنابراین چون جهت شتاب و سرعت معلوم نیست نمی‌توان نتیجه گرفت با کاهش نیروی خالص، تندی الزاماً کم می‌شود. عبارت ت نادرست است.

۵۰ ۱-۱ تندى متوسط براساس مسافت (نه جابه‌جايى) محاسبه مى‌گردد بنابراین لازم است ابتدا ببينيم كه جسم در بازهٔ زمانى موردنظر تغيير جهت داشته است يا خير. به اين منظور از روى معادلهٔ مكان- زمان معادلهٔ سرعت- زمان را استخراج مى‌كنيم:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{r} a t^r + v_0 t + x_0 \\ x = t^r - \lambda t + \epsilon \end{cases} \xrightarrow[v_0 = -\lambda]{a=r} v = r t - \lambda$$

$v=0$
 $\rightarrow t = 4s$ (لحظة تغير جهت)

۲- نمودار سرعت- زمان را رسم کرده و سرعت در لحظات ۳ و ۶ ثانیه (ابتدا و انتهای بازه زمانی ۳ ثانیه دوم) را تعیین می‌کنیم:



۳- با محاسبه اندازه سطح زیر نمودار، مسافت طی شده را به دست می آوریم:

$$l = |S_1| + S_r = \frac{1 \times 2}{2} + \frac{4 \times 2}{2} = 1 + 4 = 5m$$

۴- با داشتن مسافت، تندی متوسط را به دست می آوریم:

$$S_{av} = \frac{l}{t} = \frac{\Delta}{\tau} \frac{m}{s}$$



۴۵۴

۴

پداند

نیروی عمودی سطح (F_N) وقتی جسمی بر روی سطحی (مثل کف آسانسور) قرار دارد و با شتاب $\vec{a}$ در حال حرکت است از رابطه زیر به دست می آید:

$$\vec{F}_N + \vec{W} = m\vec{a} \quad \vec{W} = -m\vec{g} \quad F_N = m(g \pm a)$$

(اگر شتاب بالاسو باشد $\vec{a} = +a$ و اگر شتاب پایین سو باشد $\vec{a} = -a$)

باتوجه به رابطه بیان شده برای دو حالت داریم:
الف) حالت اول:

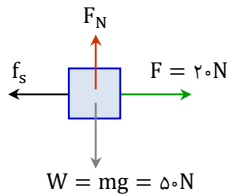
$$(F_N)_1 = m(g + a) = ۸۰ \times (۱۰ + ۲) = ۹۶۰ \text{ N}$$

ب) حالت دوم: (در حالت دوم پس از قطع کابل آسانسور، آسانسور سقوط آزاد کرده و شتاب حرکت آن $\vec{a} = \vec{g} = -g$ خواهد بود)

$$(F_N)_2 = m(g - g) = ۰$$

۴۵۵

۳



۱- نیروهای وارد به جسم را نشان داده ایم باتوجه به ساکن بودن جسم داریم:

$$F = f_s \Rightarrow f_s = ۲۰ \text{ N}$$

$$F_N = W \Rightarrow F_N = ۵۰ \text{ N}$$

۲- حتماً توجه دارید نیرویی که سطح به جسم وارد می کند براین دو نیروی f_s و F_N است بنابراین برای بزرگی R خواهیم داشت:

$$R = \sqrt{f_s^2 + F_N^2} = ۱۰\sqrt{۲۹} \text{ N}$$

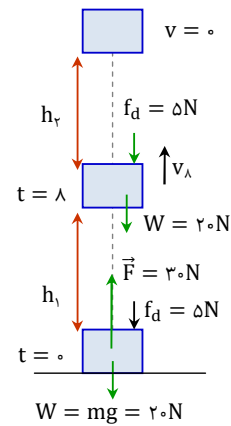
۳- برای محاسبه μ_s باید دقت کنید که می دانیم اصطکاک وارد به جسم از نوع ایستایی است:

$$f_s \leq f_{s, \max} \Rightarrow f_s \leq \mu_s F_N \Rightarrow \mu_s \geq \frac{f_s}{F_N}$$

$$\Rightarrow \mu_s \geq \frac{۲۰}{۵۰} \Rightarrow \mu_s \geq ۰/۴$$

۴۵۳ ۱- ابتدا فاصله جسم در مدت ۸ ثانیه از سطح زمین را حساب

می کنیم. در این فاصله ۳ نیروی وزن، مقاومت هوا و $\vec{F}$ به جسم اثر می کنند. با قانون دوم نیوتون شتاب را تعیین می کنیم و سپس فاصله از زمین و سرعت جسم در این لحظه را به دست می آوریم: (به شکل دقت کنید).



$$F_{\text{net}} = F - W - f_d = ma_1$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{۳۰ - ۲۰ - ۵}{۲} = ۲/۵ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$h_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 = \frac{1}{2} \times ۲/۵ \times ۸^2 = ۸۰ \text{ m}$$

$$v_1 = a_1 t = ۲/۵ \times ۸ = ۲۰ \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

۲- از لحظه $t = ۸ \text{ s}$ به بعد تنها دو نیروی W و f_d که هر دو پایین سو هستند به جسم اثر می کند اما به دلیل وجود سرعت بالاسو تا لحظه ای که این سرعت به صفر برسد جسم به سمت بالا حرکت خواهد کرد شتاب را در این مرحله حساب کرده و با رابطه مستقل از زمان h_2 را حساب می کنیم:

$$F_{\text{net}} = -W - f_d = ma_2 \Rightarrow a_2 = \frac{-۲۵}{۲} = -۱۲/۵ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$v^2 - v_1^2 = ۲a_2 h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{۰ - (۲۰)^2}{۲ \times (-۱۲/۵)} = ۱۶ \text{ m}$$

۳- حداکثر ارتفاع جسم از زمین را حساب می کنیم:

$$h_{\text{max}} = h_1 + h_2 = ۸۰ + ۱۶ = ۹۶ \text{ m}$$





۵۶

۵۸ ۲-۱ به جسم بسته شده به فنر دو نیرو اثر می‌کند، نیروی وزن و نیروی کشسانی فنر. قانون دوم نیوتون را برای هر دو حالت می‌نویسیم:

$$F_{\text{net}} = ma \begin{cases} \text{حالت اول: } F_e - W = m(-a_1) \\ \text{حالت دوم: } F'_e - W = m(+a_2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_e - W = -2 \\ F'_e - W = +2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل دو رابطه}} F'_e - F_e = 4N$$

-۲

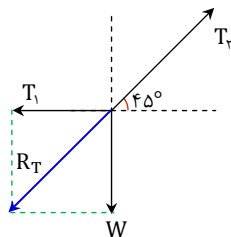
$$F_e = kx \Rightarrow F'_e - F_e = k(x' - x) \Rightarrow 4 = 200(x' - x)$$

$$\Rightarrow (x' - x) = \frac{4}{200}m = 2\text{cm}$$

۳- مشخص است تغییر طول در حالت دوم ۲cm بیشتر از حالت اول است یعنی فنر ۲cm کشیده‌تر شده و جسم بسته شده به آن ۲cm پایین خواهد آمد و فاصله آن از کف از ۱۰۰cm به ۹۸cm خواهد رسید.



۵۹

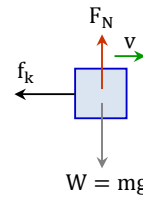


۱- نیروی T_2 باید برآیند دو نیروی T_1 و W را خنثی کند ($R_{T_1, W}$) چون T_2 با محور x زاویه 45° می‌سازد باید برآیند دو نیروی T_1 و W هم با محور زاویه 45° بسازد که به معنای این است که باید T_1 و W هم‌اندازه باشند.

۲- باتوجه به نکته بیان شده در قسمت (۱) داریم:

$$T_2 = R_{T_1, W}$$

$$R_{T_1, W} = \sqrt{T_1^2 + W^2} \xrightarrow{T_1=W} T_2 = \sqrt{2}T_1$$



۱- تنها نیروی مؤثر وارد به چوب پس از پرتاب روی سطح، نیروی اصطکاک جنبشی است.

شتاب حرکت را حساب می‌کنیم:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \vec{f}_k = m\vec{a} \Rightarrow -f_k = ma \quad \frac{f_k = \mu_k F_N}{F_N = mg}$$

$$a = \frac{-f_k}{m} = -\mu_k g$$

بدانید

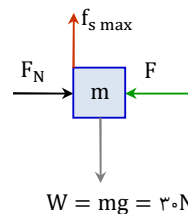
اگر جسمی با سرعت افقی روی سطح افقی پرتاب شود، بزرگی شتاب حرکت آن از رابطه $a = \mu_k g$ محاسبه می‌گردد.

۲- باتوجه به رابطه مستقل از زمان خواهیم داشت:

$$v_2^2 - v_1^2 = 2a\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2\mu_k g} = \frac{v}{2\mu_k g}$$



۵۷



۱- نیرویی که جسم به دیوار وارد می‌کند برآیند دو نیروی F_N و f_s می‌باشد. باتوجه به تعادل جسم داریم:

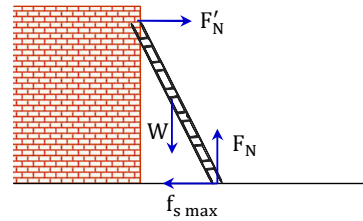
$$f_{s, \text{max}} = W = 30\text{N}$$

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_{s, \text{max}}^2} \Rightarrow 50 = \sqrt{30^2 + F_N^2} \Rightarrow F_N = 40\text{N}$$

۲- باتوجه به رابطه نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه داریم:

$$f_{s, \text{max}} = \mu_s F_N \Rightarrow \mu_s = \frac{30}{40} = 0.75$$

۶۰ ۴



۱- نیرویی که بین نردبان و دیوار مبادله می‌شود F'_N (نیروی عمودی سطح) است که اندازه آن 20N است.

۲- باتوجه به تعادل نردبان، برآیند نیروهای وارد به نردبان صفر است بنابراین نیروهای افقی و قائم باید همدیگر را خنثی کرده باشند. بر این اساس داریم:

$$F'_N = f_{s,\max} = 20\text{N}$$

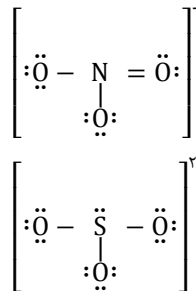
$$f_{s,\max} = \mu_s F_N \Rightarrow F_N = \frac{20}{0.5} = 40\text{N}$$

$$F_N = W = 40\text{N}$$

$$W = mg \Rightarrow m = \frac{40}{10} = 4\text{kg}$$

شیمی

۶۱ ۱ ساختار لوویس هر یک از یون‌های سولفیت (SO_3^{2-}) و نیترات (NO_3^-) به صورت زیر است:



بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه «۲»: یک مول کادمیم نیترات ($\text{Cd}(\text{NO}_3)_2$) شامل 3N_A یون و یک مول آمونیوم سولفیت ($(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$) نیز شامل 3N_A یون می‌باشد.

گزینه «۳»: یک واحد کادمیم سولفات (CdSO_4) شامل ۴ پیوند اشتراکی است.

گزینه «۴»: فرمول شیمیایی آهن (II) سولفیت و آهن (III) سولفیت به ترتیب FeSO_3 و $\text{Fe}_2(\text{SO}_4)_3$ بوده و تفاوت شمار اتم در آن‌ها برابر ۹ است.

۶۲ ۳ عبارت‌های پ و ث درست‌اند.

بررسی همه عبارت‌ها:

الف) برخی ترکیب‌های آلی مانند اتانول و استون در آب حل شده و محلول آبی تشکیل می‌دهند.

ب) در برخی محلول‌های غیر آبی، آب حل‌شونده و حلال یک ترکیب آلی است. مانند محلول آب در اتانول

پ) یون نقره (Ag^+) با یون کلرید (Cl^-) رسوب سفید رنگ نقره کلرید (AgCl) ایجاد می‌کند.

ت) یون‌های کلرید و سدیم می‌توانند از انحلال نمک‌های دیگری غیر از سدیم کلرید که شامل یون‌های کلرید و سدیم می‌باشند نیز وارد آب دریا شوند مانند منیزیم کلرید، سدیم نیترات و ...

ث) یون F^- در مراکز تأمین آب آشامیدنی به آب افزوده می‌شود زیرا به حفظ سلامت دندان‌ها کمک می‌کند.

۶۳ ۴

$$? \text{g NO}_3^- = 200\text{mL محلول} \times \frac{1/5\text{g محلول}}{1\text{mL محلول}} \times \frac{60\text{g Fe}(\text{NO}_3)_2}{100\text{g محلول}}$$

$$\times \frac{124\text{g NO}_3^-}{180\text{g Fe}(\text{NO}_3)_2} = 124\text{g NO}_3^-$$

$$? \text{g H}_2\text{O} = 200\text{mL محلول} \times \frac{1/5\text{g محلول}}{1\text{mL محلول}} \times \frac{40\text{g H}_2\text{O}}{100\text{g محلول}}$$

$$= 120\text{g H}_2\text{O}$$

$$\% \text{NO}_3^- = \frac{124}{300+120} \times 100 \approx \%29.5$$

۶۴ ۳ دستگاه گلوکومتر میلی گرم‌های گلوکز را در یک دسی‌لیتر از

خون نشان می‌دهد:

$$\text{شمار مول‌های گلوکز} = \frac{90 \times 10^{-3}}{180} = 5 \times 10^{-4} \text{mol}$$

$$\text{غلظت مولی گلوکز} = \frac{5 \times 10^{-4} \text{mol}}{100 \times 10^{-3} \text{L}} = 5 \times 10^{-2} \text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\text{ppm} = \frac{90 \times 10^{-3}}{100} \times 10^6 = 900 \text{ppm}$$

۶۵ ۱ ابتدا معادله انحلال‌پذیری نمک A را به دست می‌آوریم. در

دمای 40°C ، 100 گرم محلول سیرشده نمک A شامل 20 گرم نمک A و 80 گرم آب است. پس:

$$S_{40^\circ\text{C}} = \frac{20}{80} \times 100 = 25\text{g A}$$

$$a = \frac{25-5}{40-0} = 0.5 \Rightarrow S = 0.5\theta + 5$$

$$S_{80^\circ\text{C}} = 0.5(80) + 5 = 45\text{g A}$$

اگر 145 گرم محلول سیرشده نمک A از دمای 80°C به دمای 40°C برسد، 20 گرم نمک A به شکل جامد رسوب می‌کند. پس:

$$? \text{g رسوب} = 435\text{g} \times \frac{20\text{g}}{145\text{g}} = 60\text{g A}$$

$$S_{20^\circ\text{C}} = 0.5(20) + 5 = 15\text{g}$$

$$? \text{g H}_2\text{O} = 60\text{g A} \times \frac{100\text{g H}_2\text{O}}{15\text{g A}} = 400\text{g H}_2\text{O}$$



۷۰. ۳) شمار یون‌های یک واحد کلسیم کلرید بیشتر از یک واحد سدیم کلرید می‌باشد. اگر ۵٪ مول کلسیم کلرید در ستون سمت راست حل شود، آنگاه غلظت مولی یون‌ها در ستون سمت راست ۱/۵ و در ستون سمت چپ ۱ مولار بوده، پس مولکول‌های آب از ستون سمت چپ (محلول رقیق) با گذر از غشای نیمه‌تراوا وارد ستون سمت راست (محلول غلیظ) می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

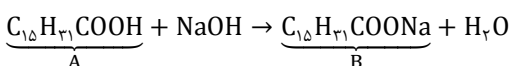
گزینه «۱»: با گذشت زمان فرایند اسمز روی داده و مولکول‌های آب از ستون سمت راست وارد ستون سمت چپ شده و غلظت مولی نمک خوراکی کاهش می‌یابد.

گزینه «۲»: با اعمال فشار، مولکول‌های آب از محلول نمک خوراکی (محلول غلیظ) وارد آب خالص (رقیق) شده و فرایند اسمز وارونه روی می‌دهد.

گزینه «۴»: با فرایند اسمزی که روی می‌دهد نمک‌زدایی صورت نمی‌گیرد.

۷۱. ۲)

(پالمیتیک اسید = A)



$$? g \text{ آلاینده } = 2000 g A \times \frac{100}{100} \times \frac{1 \text{ mol } A}{256 g A} \times \frac{1 \text{ mol } B}{1 \text{ mol } A}$$

$$\times \frac{278 g B}{1 \text{ mol } B} \times \frac{100}{1 g B} = 1390 g \text{ آلاینده}$$

۷۲. ۴) مخلوط آب، روغن و صابون و رنگ‌های پوششی کلوتید، شربت معده و مخلوط آب سخت و صابون سوسپانسیون، سرکه سفید و مخلوط آب مناطق کویری و پاک‌کننده غیرصابونی نیز محلول می‌باشند. محلول و کلوتید پایدار و سوسپانسیون ناپایدار بوده و ته‌نشین می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۱»: نور هنگام عبور از میان محلول‌ها پخش نمی‌شود.

گزینه «۲»: فقط ذره‌های سازنده کلوتیدها توده‌های مولکولی با اندازه‌های متفاوت می‌باشند. (دو مخلوط)

گزینه «۳»: دو مخلوط همگن و چهار مخلوط ناهمگن است.

۶۶. ۱) الف) اگر دمای یک محلول سیرشده از ماده‌ای که نمودار «انحلال‌پذیری - دما» آن به شکل صعودی می‌باشد، کاهش یابد به یک محلول سیرشده یا فراسیرشده تبدیل می‌شود.

ب) کلسیم سولفات ماده‌ای کم محلول بوده و انحلال‌پذیری آن در دمای 25°C برابر ۰/۲۳ گرم است. (بین ۰/۰۱ تا ۱ گرم) پ) سالانه میلیون‌ها تن سدیم کلرید به روش تبلور از آب دریا جداسازی و استخراج می‌شود.

۶۷. ۲) هیچ‌یک از مولکول‌ها در میدان الکتریکی جهت‌گیری نکرده‌اند. بنابراین هر سه مولکول ناقطبی می‌باشد. در مولکول‌های ناقطبی نیز با افزایش جرم مولی، نقطه جوش افزایش می‌یابد. بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه «۱»: مولکول‌های دو اتمی جورهمسته (همانند شکل (آ)) ناقطبی و مولکول‌های دو اتمی ناجورهمسته قطبی می‌باشند.

گزینه «۳»: گشتاور دوقطبی مولکول‌های ناقطبی صفر است.

گزینه «۴»: مولکول‌های ناقطبی در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کنند پس با جابه‌جایی نوع بار الکتریکی صفحه‌ها در هر میدان الکتریکی، تغییری در رفتار مولکول‌های ناقطبی مشاهده نمی‌شود.

۶۸. ۳) عبارت‌های سوم و پنجم درست می‌باشند.

بررسی تمامی عبارت‌ها:

عبارت اول: اتانول و استون به هر نسبتی در آب حل می‌شوند.

عبارت دوم: فرمول مولکولی استون و اتانول به ترتیب C_3H_6O و C_2H_6O بوده و تفاوت جرم مولی آن‌ها به اندازه جرم مولی کربن می‌باشد.

عبارت سوم: هر دو مولکول قطبی هستند و گشتاور دوقطبی بزرگ‌تر از صفر دارند ولی به دلیل وجود پیوند $O-H$ در مولکول اتانول، بین مولکول‌های اتانول پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود که از نیروی جاذبه میان مولکول‌های استون قوی‌تر است.

عبارت چهارم: نقطه جوش اتانول بالاتر از استون بوده پس در تقطیر جزء به جزء مخلوط اتانول و استون، استون زودتر جدا می‌شود.

عبارت پنجم: اتانول و استون جزو ترکیب‌های آلی بوده و به عنوان حلال مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۶۹. ۲) عبارت‌های الف و ب درست هستند.

بررسی تمامی عبارت‌ها:

الف) هر چه مقدار نمک در آب دریا بیشتر باشد و هر چه دمای آب دریا بیشتر باشد، گاز کمتری در آب حل می‌شود.

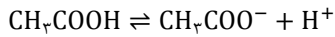
ب) ید در هگزان و شکر در آب به صورت مولکولی حل می‌شوند و ساختار مولکول‌های آن‌ها حفظ می‌شود.

پ) در یخ هر مولکول آب با ۴ مولکول دیگر آب با پیوند هیدروژنی اتصال دارد.

ت) مطابق قانون هنری، در دمای ثابت، انحلال‌پذیری گاز با فشار گاز رابطه مستقیم دارد.

ث) شکل فقط آنیون آبیوشیده را نشان می‌دهد. (مولکول‌های آب از سمت هیدروژن، یون را احاطه کرده‌اند.)

۱. ۷۵



$$\text{شمار مول‌های اولیه اسید} = 0.198 + 0.002 = 0.2 \text{ mol}$$

$$\alpha = \frac{0.002}{0.2} = 0.01$$

$$K_a \approx M \cdot \alpha^2 \Rightarrow K_a = \frac{0.2}{100 \times 10^{-3}} \times (0.01)^2 = 2 \times 10^{-4}$$

با ۴ برابر کردن حجم محلول در همان دما، K_a ثابت مانده ولی غلظت اسید $\frac{1}{4}$ برابر خواهد شد:

$$K_a \approx M' \cdot \alpha'^2 \Rightarrow 2 \times 10^{-4} = \frac{2}{4} \alpha'^2$$

$$\Rightarrow \alpha'^2 = 4 \times 10^{-4} \Rightarrow \alpha' = 0.02$$

$$\frac{M'}{\alpha'} = \frac{\frac{1}{4}}{0.02} = 25$$

۲. ۷۶ نیتریک اسید (HNO_3) اسید قوی و نیترو اسید (HNO_2)

اسید ضعیف می‌باشد ولی در محلول آبی هر دوی آنها غلظت یون هیدرونیوم با غلظت یون NO_3^- یا NO_2^- برابر است.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه «۱»: HX و HY می‌توانند به ترتیب HF و HCl باشند ولی در شرایط یکسان (دما و غلظت) میزان اسیدی بودن HF کمتر از HCl است.

گزینه «۳»: HX و HY می‌توانند به ترتیب HBr و HCl باشند و در شرایط یکسان سرعت واکنش فلز منیزیم با محلول آنها به تقریب برابر است. (هر دو اسید قوی هستند.)

گزینه «۴»: NaA ترکیب یونی بوده و اصطلاح یونش برای ترکیب‌های مولکولی به کار می‌رود.

۷۷

۲. اگر در لحظه تعادل ۲۵ درصد از جرم SO_3 کم شده باشد یعنی ۱ گرم از آن به فراورده‌ها تبدیل شده و ۳ گرم از آن در تعادل وجود دارد:

$$\begin{aligned} ? \text{ mol SO}_2 &= 1 \text{ g SO}_3 \times \frac{1 \text{ mol SO}_3}{80 \text{ g SO}_3} \times \frac{2 \text{ mol SO}_2}{2 \text{ mol SO}_3} \\ &= \frac{1}{80} \text{ mol SO}_2 \end{aligned}$$

$$? \text{ mol O}_2 = \frac{1}{80} \text{ mol SO}_2 \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{2 \text{ mol SO}_2} = \frac{1}{160} \text{ mol O}_2$$

غلظت‌های تعادلی مواد به صورت زیر می‌باشد:

$$[\text{SO}_3] = \frac{3}{4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{SO}_2] = \frac{1}{4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$[\text{O}_2] = \frac{1}{160} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{[\text{SO}_2]^2 [\text{O}_2]}{[\text{SO}_3]^2} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{160}\right)}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} \\ &= \frac{1}{9} \approx 3/5 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{aligned}$$

۳. ۴ پاک‌کننده‌های خورنده برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی و

غیرصابونی با آلاینده‌ها واکنش داده و با تغییر ماهیت آنها (تبدیل آنها به مواد دیگر و محلول در آب) باعث زدودن آنها می‌شوند. (عبارت درست)

صابونی که به طور سنتی در مراغه و برخی شهرهای دیگر تولید می‌شود از حرارت دادن پیه گوسفند و سودسوزآور در دیگ‌های پر از آب تولید می‌شود. این صابون افزودنی شیمیایی ندارد و به دلیل خاصیت بازی برای موهای چرب مناسب است.

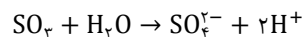
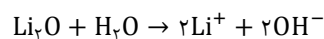
بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه «۱»: از واکنش مخلوط پودر آلومینیم و سدیم هیدروکسید و آب، گاز هیدروژن تولید می‌شود.

گزینه «۲»: به منظور افزایش خاصیت ضدعفونی‌کنندگی و میکروب‌کشی صابون‌ها به آنها ماده شیمیایی کلردار اضافه می‌شود. گزینه «۳»: برای افزایش قدرت پاک‌کنندگی مواد شوینده به آنها نمک‌های فسفات اضافه می‌شود.

۴. ۲ معادله واکنش لیتیم اکسید (اکسید فلزی و بازی) و گوگرد تری

اکسید (اکسید نافلزی و اسیدی) با آب به صورت زیر است:



از آنجایی که انحلال‌پذیری لیتیم سولفات با افزایش دما کاهش می‌یابد، پس اگر دمای محلول افزایش یابد ممکن است در دمای معینی مقداری از یون‌های Li^+ و SO_4^{2-} به شکل نمک جامد لیتیم سولفات (Li_2SO_4) ته‌نشین شوند.

بررسی گزینه‌های نادرست:

گزینه «۱»: اگر جرم اکسیدهای حل شده برابر باشد (m گرم)، آنگاه شمار مول‌های لیتیم اکسید $\frac{m}{30}$ و شمار مول‌های گوگرد تری‌اکسید $\frac{m}{80}$ شده و با توجه به ضرایب استوکیومتری برابر اکسیدها و از آنجایی که $\frac{m}{30} > \frac{m}{80}$ می‌باشد پس غلظت یون هیدروکسید در محلول از غلظت یون هیدرونیوم بیشتر خواهد بود.

گزینه «۳»: وجود یون‌های Li^+ و SO_4^{2-} باعث می‌شود رسانایی محلول به مراتب از رسانایی آب خالص بیشتر باشد.

گزینه «۴»: با توجه به معادله واکنش اکسیدها با آب، از واکنش هر مول لیتیم اکسید با آب، ۲ مول یون تک اتمی (Li^+) و ۲ مول یون چند اتمی (OH^-) و از واکنش هر مول گوگرد تری‌اکسید با آب، سه مول یون چند اتمی (یک مول SO_4^{2-} و دو مول H_3O^+) تولید می‌شود. پس شمار یون‌های چند اتمی بیشتر خواهد بود.



۷۸. ۱ با توجه به آنکه دو اسید بسیار ضعیف می‌باشند می‌توان از

رابطه تقریبی $k_a \approx \frac{[H^+]^2}{M}$ استفاده نمود:

$$\left. \begin{array}{l} \text{HA برای اسید: } K_a = \frac{[H^+]^2}{M} \\ \text{HB برای اسید: } K'_a = \frac{[H^+]'^2}{M'} \end{array} \right\} \frac{K'_a}{K_a} = \frac{\frac{[H^+]'^2}{M'}}{\frac{[H^+]^2}{M}} = \frac{\frac{1}{10}M}{\frac{1}{10}M} = 100$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۲»:

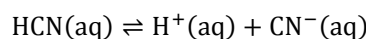
$$\left. \begin{array}{l} \text{HA برای اسید: } [H^+] = M \cdot \alpha \\ \text{HB برای اسید: } [H^+] = M' \cdot \alpha' \end{array} \right\} \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\frac{[H^+]}{M}}{\frac{[H^+]}{10M}} = \frac{1}{10}$$

گزینه «۳»: از آنجایی که حجم دو اسید مشخص نیست نمی‌توان شمار مول‌های یونیده نشده آنها را مقایسه کرد.

گزینه «۴»: قدرت اسیدی HB بیشتر است. (غلظت مولی آن نصف HA می‌باشد ولی غلظت مولی یون هیدرونیوم در محلول آن بیشتر است.)

۷۹. ۳ هیدروسیانیک اسید یک اسید ضعیف بوده و معادله یونش آن

به صورت برگشت‌پذیر (تعادلی) نوشته می‌شود:



بررسی گزینه‌های درست:

گزینه «۱»: ثابت یونش (ثابت تعادل) فقط با تغییر دما، تغییر می‌کند.

گزینه «۲»: غلظت یون‌ها در محلول ۰/۵ مولار آلومینیم نیترات $(\text{Al}(\text{NO}_3)_3)$ برابر ۲ مول بر لیتر ولی در محلول یک مولار باریم کلرید (BaCl_2) برابر ۳ مول بر لیتر است.

گزینه «۴»: قدرت اسیدی فورمیک اسید از استیک اسید بیشتر است و نوار منیزیم با سرعت بیشتری با فورمیک اسید واکنش می‌دهد ولی شمار مول‌های گاز هیدروژن تولید شده در آنها در شرایط یکسان برابر می‌باشد.

۸۰. ۱ فقط عبارت سوم درست است.

بررسی تمامی عبارت‌ها:

عبارت اول: اتیلن گلیکول و استون به صورت مولکولی در آب حل می‌شوند و به همین علت محلول آبی آنها غیر الکترولیت است.

عبارت دوم: ترکیب‌های یونی در حالت جامد الکترولیت و محلول آبی آنها محلول الکترولیت می‌باشد.

عبارت سوم: برخی مواد مولکولی در حالت خالص فاقد یون بوده و رسانای الکتریسیته نمی‌باشند ولی با حل شدن در آب یونش یافته و محلول آبی آنها رسانای الکتریسیته می‌باشد.

عبارت چهارم: برخی مواد مانند اکسیدهای نافلزی در ساختار خود اتم هیدروژن ندارند ولی پس از ورود به آب، با آب واکنش داده و غلظت H^+ را افزایش می‌دهند.

• در دما و غلظت برابر غلظت یون هیدرونیوم در محلول اسیدهای قوی تک پروتون‌دار مانند HA و HX به تقریب برابر است (زیرا به طور کامل یونش می‌یابند). ولی درجه یونش یا ثابت یونش اسیدهای ضعیف متفاوت بوده پس غلظت یون هیدرونیوم در محلول آنها (حتی در دما و غلظت برابر) متفاوت است.